2014年　東大数学　文系第3問④（ファクシミリ論法）

解法5 ファクシミリ論法

xを固定し、y=（パラメータの降べきの順）と変形する。
（今回は、sを固定し、t=（パラメータの降べきの順）とする）
yの値を求めて、領域に図示する。

③より　$t=\frac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}(s-p)+\sqrt{3}p$　③に $q=p-3$ を代入した。

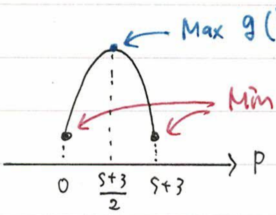
右辺を $g(p)$ とすると、

$$t=g(p)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}(s+3)p-\sqrt{3}s$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

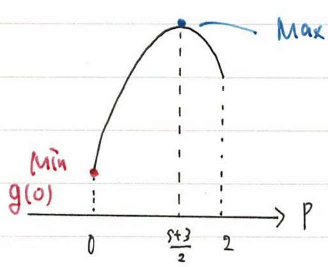
これに対し、解法aと同様に場合分けをする。← pを残しqを消去したから
詳しい場合分けは、解法aを参照

(i) $-3\leqq s\leqq -1$ のとき、$0\leqq p\leqq s+3$ である。



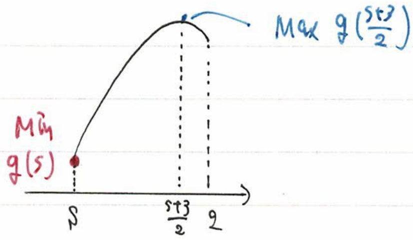
よって、$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である。
（$g(s+3)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ でも可）

(ii) $-1\leqq s\leqq 0$ のとき、$0\leqq p\leqq 2$ である。
軸の位置は　$1\leqq \frac{s+3}{2}\leqq \frac{3}{2}$　なので



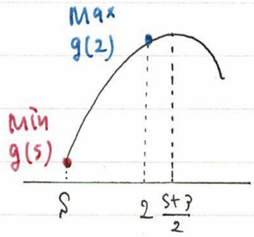
よって、$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である。

(iii-1) $0\leqq s\leqq 1$ のとき、$s\leqq p\leqq 2$ である。
軸の位置は　$\frac{3}{2}\leqq \frac{s+3}{2}\leqq 2$　なので



よって、$g(s)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$ である

(iii-2) $1\leqq s\leqq 2$ のとき、$s\leqq p\leqq 2$ なので
軸の位置は、$2\leqq \frac{s+3}{2}\leqq \frac{5}{2}$



よって　$g(s)\leqq t\leqq g(2)$ である。

まとめると、

$-3\leqq s\leqq -1$ のとき　$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$
$-1\leqq s\leqq 0$ のとき　$g(0)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$
$0\leqq s\leqq 1$ のとき　$g(s)\leqq t\leqq g\left(\frac{s+3}{2}\right)$
$1\leqq s\leqq 2$ のとき、$g(s)\leqq t\leqq g(2)$

$g(0)=-\sqrt{3}s$　$g(s)=\sqrt{3}s$　$g(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}$
$g\left(\frac{s+3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

図示は（省略）